



TITLE:

$\mathbb{Q}_p$ 上の概均質ベクトル空間の相対不変式の複素巾のフーリエ変換について(概均質ベクトル空間の展望)

AUTHOR(S):

村上, 順

---

CITATION:

村上, 順.  $\mathbb{Q}_p$ 上の概均質ベクトル空間の相対不変式の複素巾のフーリエ変換について(概均質ベクトル空間の展望). 数理解析研究所講究録 1985, 555: 85-92

ISSUE DATE:

1985-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98940>

RIGHT:

# $\mathbb{Q}_p$ 上の根元均質ベクトル空間の相対不変式の 複素中のフーリエ変換について

阪大理 村上 順

序 [J. Igusa] により,  $p$  進体上の根元均質ベクトル空間の相対不変式の複素中のフーリエ変換に対しても [M. Sato - T. Skintani] と同様の結果が示された。そしていくつかの例について実際に  $P$ -因子を計算している。ここでは [M. Sato - T. Kimura] の分類での [1], [2], [3], [13], [15] の根元均質ベクトル空間についてフーリエ変換を計算した結果を述べる。

1. 記号  $p$  を奇素数とし,  $\mathbb{Q}_p$  を  $p$  進体,  $\mathbb{Z}$  をその整数環とする。また,  $\chi$  を,  $\mathbb{Q}_p$  から  $\mathbb{C}^\times$  への加法的指標で,  $\chi|_{\mathbb{Z}} \equiv 1$ ,  $\chi|_{p^{-1}\mathbb{Z}} \neq 1$  となるものを 1 つ固定し,  $\alpha$  を  $\mathbb{Q}_p^\times$  から  $\mathbb{C}^\times$  への乗法的指標とする。ここで,  $\alpha(1) = 0$  と定義することにより,  $\alpha$  を  $\mathbb{Q}_p$  から  $\mathbb{C}$  への写像に拡張しておく。  $\omega_s$  は  $\omega_s|_{\mathbb{Z}^\times} \equiv 1$ ,  $\omega_s(p) = p^{-s}$  で定まる乗法的指標とし,  $\omega_s(\cdot)$  のことを  $|\cdot|$  と書く。

$(G, V)$  を  $\mathbb{Q}_p$  上の既約正則根元均質ベクトル空間

とし,  $f$  をその相対不変式とする。  $V$  中の  $G$  の open orbits を  $Z_1, Z_2, \dots, Z_\ell$  で表わす。  $\check{V}$  を  $V$  の dual space とすると,  $\check{V}$  も  $G$  に関する根元均質ベクトル空間になり,  $V$  との間には canonical な同型写像があるので, それを  $\varphi$  とする。このとき,  $[u, v]: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  を  $[u, v] = \varphi^{-1}(u)v$  で定義すると, これは対称双-次形式となる。  $V$  上の加法に関する不変測度  $d\mu$  で  $\psi([,])$  と  $d\mu$  に関するフーリエ変換を2回繰り返すともとにもどるように正規化されたものを1つ固定する。超関数としての  $\chi(f(v))$  のフーリエ変換

$$g(\chi)(v) = \int_V \chi(f(v)) \psi([u, v]) d\mu$$

について考える。

2. 定理 (J. Igusa [1])  $v \in Z_i$  に対し

$$g(\chi)(v) = \sigma_i(\chi) \left( \chi_{-1} \omega_{\frac{n}{d}} \right) (f(v))$$

が適当な  $\chi$  に対して成り立つ。

但し,  $n = \dim V$ ,  $d = \deg f$  とする。

(正確な statement は [1] を見て下さい)

以下では, この  $\sigma_i(\chi)$  を計算した結果を述べる。

3.  $G \times GL_m(\mathbb{Q}_p)$  が  $M_m(\mathbb{Q}_p)$  に作用する場合 ([S.-K.] [1])

$M_m(\mathbb{Q}_p)$  中の  $GL_m(\mathbb{Q}_p)$  の open orbit は 唯一つ.

$f = \det$  である。  $v \in Z_1$  に対し.

$$g(x)(v) = \gamma \cdot x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-m}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^m \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x) |x|^{k-1} \psi(x) dx$$

4.  $GL_m(\mathbb{Q}_p)$  が  $Sym_m(\mathbb{Q}_p)$  ( $m$  次対称行列全体) に作用する場合 ([S.-K.] [2]) ( $m \geq 2$ )

$f = \det$  である。

$v$  が  $\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ 0 & \ddots & \\ & & \delta_m \end{pmatrix}$   $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_m \neq 0$  の  $\lambda$  である orbit

に入る場合.

$$g(x)(v) = \gamma_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-\frac{m+1}{2}}$$

$$\gamma_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m} = \frac{x^{-1}(\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_m)}{|\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_m|^{\frac{m+1}{2}}} \prod_{k=1}^m \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x) |x|^{\frac{m-k}{2}} \prod_{j=k+1}^m \mu\left(\frac{\delta_j}{\delta_k} x\right) \left|\frac{\delta_j}{\delta_k}\right|^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{但し. } \mu(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{Q}_p} \psi(x a^2) da^2$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \chi_p(x) + g_2(p) \chi_2(x) + g_2(p) \chi_2 \chi_p(x))$$

そこで  $x = u p^k$ ,  $u \in \mathcal{O}^\times$  とすると

$$\chi_p(x) = \begin{cases} 1 & k: \text{偶数} \\ -1 & k: \text{奇数} \end{cases} \quad g_2(p) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod{4} \\ i & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 1 & u \text{ が平方元} \\ -1 & u \text{ が平方元でない。} \end{cases}$$

5.  $GL_{2m}$  が  $Alt_{2m}$  ( $2m$  次交代行列の全体) に作用する場合 ([S.-K.] [3]) ( $m \geq 3$ )

open orbit は唯一つで,  $f = Pff$  である。

$$g(x)(v) = \gamma \cdot \chi^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-2m+1}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^m \int_{\mathcal{O}_p} \chi(x) |x|^{2k-2} \psi(x) dx$$

6.  $Sp_{2n} \times GL_{2m}$  が  $M_{2n, 2m}$  に作用する場合 ([S.-K.] [13]) ( $n \geq 2m \geq 2$ )

open orbit は唯一つ

$$f(v) = Pff(v J v)$$

$$J = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}^n & \overbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}^n \\ \hline & \overbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}^n & \overbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}^n \\ & \underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_n & \underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_n \end{matrix}$$

$$g(x)(v) = \gamma \chi^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-4n}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^m \int_{\mathcal{O}_p} \chi(x) |x|^{\frac{k-1}{2}} \psi(x) dx \quad \prod_{k=1}^m \int_{\mathcal{O}_p} \chi(x) |x|^{2n-2k+1} \psi(x) dx$$



c)  $n$ : even  $GO_n$ : non-split の場合

$$f(v) = \det({}^t v Q v)$$

$$\delta \in \mathcal{O}^\times \setminus (\mathcal{O}^\times)^2$$

$m \geq 2$  の場合

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ & \delta & 0 & & \\ & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$GO_n$  は  $Q$  を scalar 倍を除いて不変にするもの

orbit は  $\frac{n}{2} \cdot m$  とすると,

$$v_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^m \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_m \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}}_m \\ \underbrace{0}_{\frac{n}{2}-m} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$v_1$  を含む  $Z_1$  と  $v_2$  を含む  $Z_2$  とがある。

$v \in Z_1$  に対しては

$$g(x)(v) = \gamma_1 x^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-n}$$

$$\gamma_1 = x^{-1}(\delta) \cdot \int_{\mathcal{O}_P^{m-1}}$$

$$\left( \prod_{i=1}^{m-1} \int_{\mathcal{O}_P} \chi(x) |x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu\left(x \frac{y_j}{y_i}\right) \psi(x) dx \right)$$

$$\times \prod_{i=1}^{m-1} \chi(y_i) |y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i)^{m-i} \mu(-\delta y_i) \psi(y_i) dy_1 \cdots dy_{m-1}$$

$$\times \int \chi(a) |a|^{\frac{n}{2}} \psi(a) da \int_{\mathcal{O}_P} \chi(\delta - b^2) |\delta - b^2|^{\frac{m-1}{2}} \mu(\delta - b^2)^{m-1} db$$

$v \in Z_2$  に対しては

$$\begin{aligned}
 g(x)(v) &= \gamma_2 \cdot \chi^{-1}(f(v)) |f(v)|^{-n} \\
 \gamma_2 &= \chi^{-1}(p\delta) p^{n+\frac{m}{2}-1} \int_{\mathbb{Q}_P^{m-1}} \chi(y_1 \dots y_{m-1}) \mu(y_1 \dots y_{m-1}) \chi(x) |x|^{\frac{n}{2}} \mu(x) \chi(x) dx \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \chi(y_i) |y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i)^{m-i} \mu(-\delta y_i) \chi(y_i) dy_1 \dots dy_{m-1} \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{Q}_P} \chi(a) |a|^{\frac{n}{2}} \chi(a) da \int_{\mathbb{Q}_P} \chi(\delta - b^2) |\delta - b^2|^{\frac{m-1}{2}} \mu(\delta - b^2)^{m-1} db \\
 \text{但し、} \int_{\mathbb{Q}_P} \chi(\delta - a^2) da &= \frac{\chi(\delta) \int \frac{\chi^{-1}(x)}{|x|} \chi(x) dx}{\int \frac{\chi^{-1}(x)}{|x|^{\frac{3}{2}}} \mu(-\delta^{-1}x) \chi(x) dx}
 \end{aligned}$$

であり、 $\mu(x)$  は乗法的指標の和なので、 $\mu(\cdot)$  達の積を展開して各変数ごとにまとめることにより、上の場合のどれもが、1変数の  $p$ -函数を用いて表わされていることがわかる。

c) で  $m=1$  の場合、複素数に対しては [J. Igusa] で計算されている。一般の場合には、また計算していません。



## 文献

- [1] J. Igusa, Some results on  $p$ -adic complex powers, Amer. J. of Math., 106(1984), 1013-1032.
- [2] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J., 65(1977), 1-155.
- [3] M. Sato and T. Shintani, On zeta-functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math., 100, 1 (1974) 131-170.